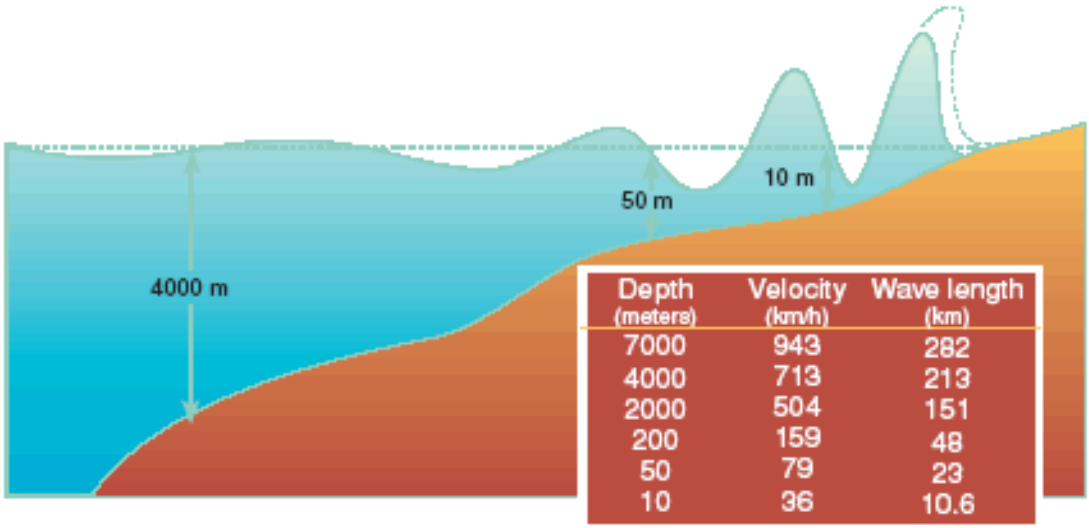
Döntő fizika feladatai és megoldásuk

F.1. Cunami ismét



A cunami hullám formájának változása, ahogy a sekélyebb víz felé mozog (NOAA)
(https://www.windows2universe.org/?page=/earth/tsunami1.html)
Az ábra, a táblázat a cunami egyes jellemzőit tartalmazza.

Egy adott földrengés a tenger alján van, epicentruma ezer kilométerre a parttól. A víz mélysége a parttól való távolság függvényében a következőképpen adható meg:

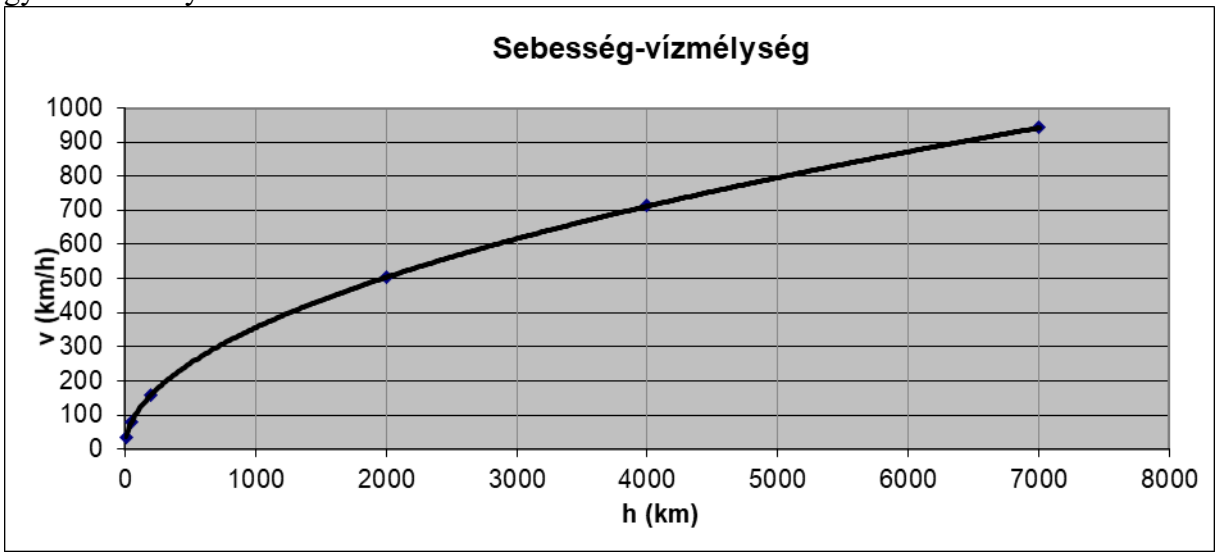
$$h(x) = 0{,}007 \cdot x^2$$

ahol a h-t méterben kapjuk, ha az x-et kilométerben adjuk meg.

Ezek alapján:
a, Mekkora a hullám sebessége a parttól 200, 500 és 800 kilométer távolságra?
b, Hogyan függ a cunami sebessége a parttól való távolságtól?
c, Mennyi idő telik el a rengéstől addig, amíg a cunami egy kilométerre közelíti meg a partot?

Megoldás:

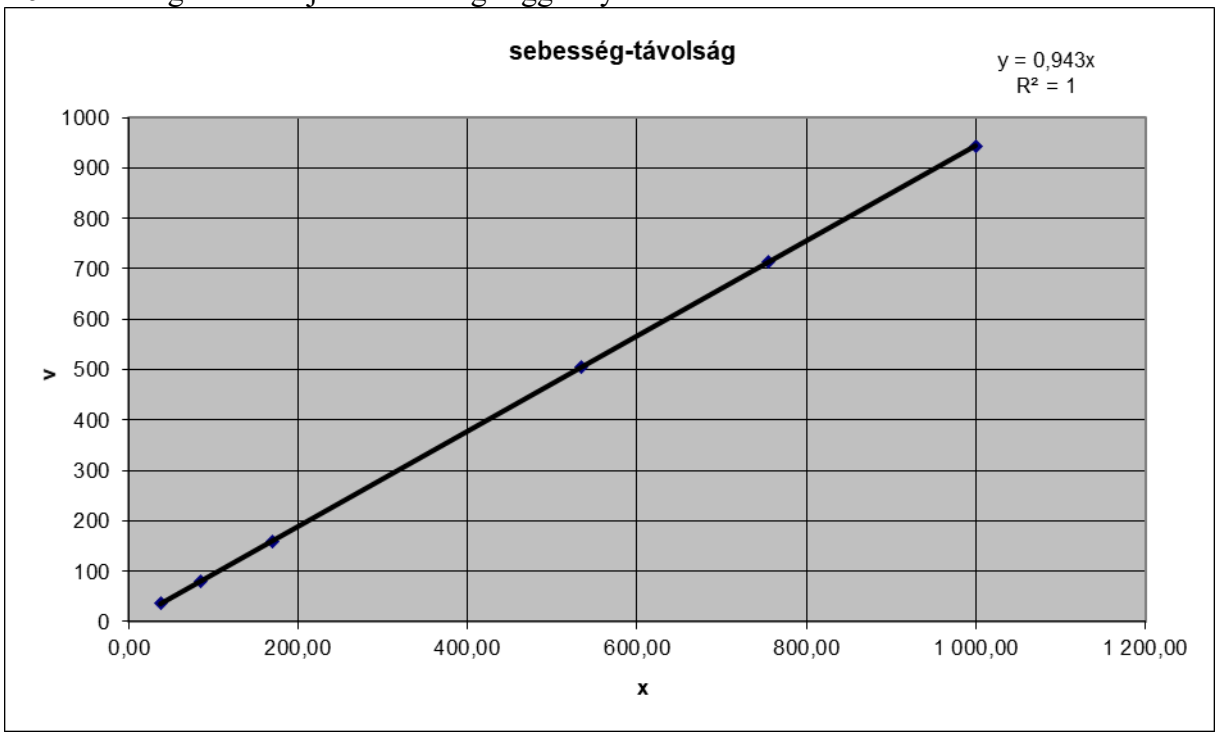
A megadott táblázat alapján (már az első fordulóból ismert, hogy) a sebesség a vízmélység gyökével arányos



a, A megadott adatok és függvény alapján a keresett sebességek a megadott mélységekben rendre 189, 472 és 754 km/h.
b, Az ismert adatok alapján:

Az epicentrumtól		a=	7,00E-06
x	h(m)	gyök(h)	v(km/h)
1 000,00	7000	83,666	943
755,93	4000	63,24555	713
534,52	2000	44,72136	504
169,03	200	14,14214	159
84,52	50	7,071068	79
37,80	10	3,162278	36

Ha a sebességet ábrázoljuk a távolság függvényében:



vagyis a sebesség ebben az esetben egyenesen arányos a parttól való távolsággal. Képlettel

$$v(x)=0{,}943x$$

ahol az x km-ben, a sebesség km/órában értendő.

c, Ha éppen x távolságra van, egy Δx távolságot Δx/v(x) idő alatt tesz meg. Az összes idő ezek összege. Két lehetőség van:
1. közelítő számolás pl. tíz részre osztjuk a távolságot

$$t=\frac{1}{0{,}943}\sum_{i=1}^{10}\frac{100\ km}{i\cdot 100-50}=\frac{100}{0{,}943\cdot 50}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{19}\right)=4{,}524\ (h)$$

2. integrálunk:

$$t=\int_1^{1000}\frac{dx}{v(x)}=\int_1^{1000}\frac{dx}{0,943x}=\frac{1}{0,943}\int_1^{1000}\frac{dx}{x}=\frac{1}{0,943}\left[\ln x\right]_1^{1000}=\frac{1}{0,943}(\ln 1000-\ln 1)=\frac{\ln 1000}{0,943}=7,3\,(h)$$

Tehát a cunami 7,3 óra alatt ér a part közelébe.

A közelítés alábecsüli az időt, rövidebb távval javítható, pl. húsz részre osztással 5,26 órát kapunk.

F.2. Aszteroida

A (Asteroid impact Chicxulub illustration (NASA).jpg)

A Földtől 210 000 km távolságban elhelyezkedő szikla sebessége éppen nulla. A Föld vonzása miatt elindul a Föld felé. Hogy elkerüljük a közvetlen becsapódást, az álló sziklába egy rakétát lőnek bele, amelyik a kő elképzelt indulási irányára merőlegesen érkezik.

a, Beavatkozás nélkül mekkora lenne a becsapódási sebesség?
b, Mennyi idő telne el a becsapódásig?
c, Mekkora legyen a szikla sebessége a rakétával való ütközés után, hogy a Föld középpontjától legalább tízezer kilométerre menjen el a szikla?

(A szikla átmérője egy kilométer, tömege 10^{12} kg.)

Megoldás:
a, A szikla helyzeti energiája mozgási energiává alakul:

$$-f\frac{Mm}{d}+0=-f\frac{Mm}{d}+\frac{1}{2}mv^2$$

Ebből:

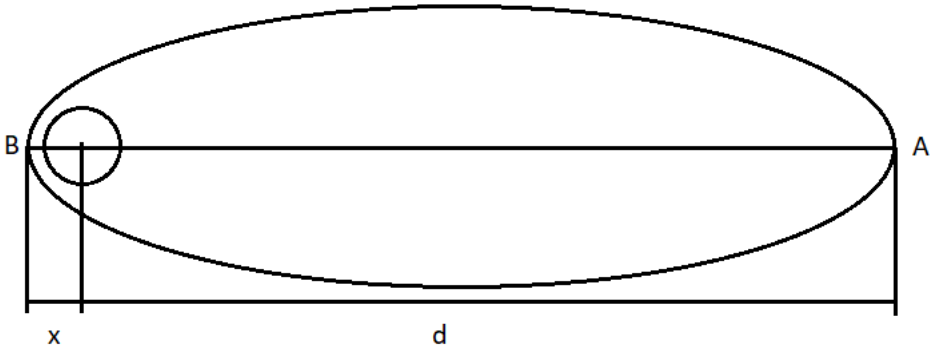
$$v=\sqrt{2fM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d}\right)}=10\,729\,\frac{m}{s}=10,729\,\frac{km}{s}$$

b, Kepler harmadik törvénye alapján számolhatunk, az egyik keringő test a Hold, a másik a szikla.
A sziklát a Föld középpontjával összekötő szakasz tekinthető egy elfajult ellipszisnek, melynek nagytengelye d.

$$\left(\frac{a}{a_{Hold}}\right)^3=\left(\frac{T}{T_{Hold}}\right)^2$$

$$\left(\frac{210:2}{384}\right)^3=\left(\frac{T}{28}\right)^2$$

Ebből négy nap adódik, az esési idő ennek a fele, tehát két nap.
c, Ha az esési irányra merőleges kezdősebességet kap a szikla, akkor ez lesz az új ellipszis nagytengelyének legtávolabbi pontja (A). Ha a Földtől x távolságban halad el, ez lesz a legközelebbi pont (B).



Adott a d és az x távolság. Felírhatjuk a perdületmegmaradás törvényét a szikla e két helyzetére:

$$\Theta_A\omega_A=\Theta_B\omega_B\,.$$

Ebbe beírva a tehetetlenségi nyomatékokat:

$$md^2\omega_A=mx^2\omega_B\,.$$

Ebből osztás és $r\omega=v$ felhasználásával:

$$dv_A=xv_B\,.$$

Ebből a B-beli sebességet kifejezve $v_A=v$ jelöléssel: $v_B=\frac{d}{x}v$.

Még az energiamegmaradást felírva:

$$-\mathrm{f}\,\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{d}}+\frac{1}{2}\mathrm{mv}_\mathrm{A}^2=-\mathrm{f}\,\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{x}}+\frac{1}{2}\mathrm{mv}_\mathrm{B}^2$$

Ebből az előbbivel:

$$-2\mathrm{f}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{d}}+\mathrm{v}^2=-2\mathrm{f}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{x}}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{x}}\mathrm{v}\right)^2$$

Ebből:

$$2\mathrm{fM}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-\frac{1}{\mathrm{d}}\right)=\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{x}}\right)^2-1\right)\mathrm{v}^2$$

$$2fM\frac{d-x}{xd}=\frac{d^2-x^2}{x^2}v^2$$

$$2fM\frac{d-x}{d}=\frac{(d-x)(d+x)}{x}v^2$$

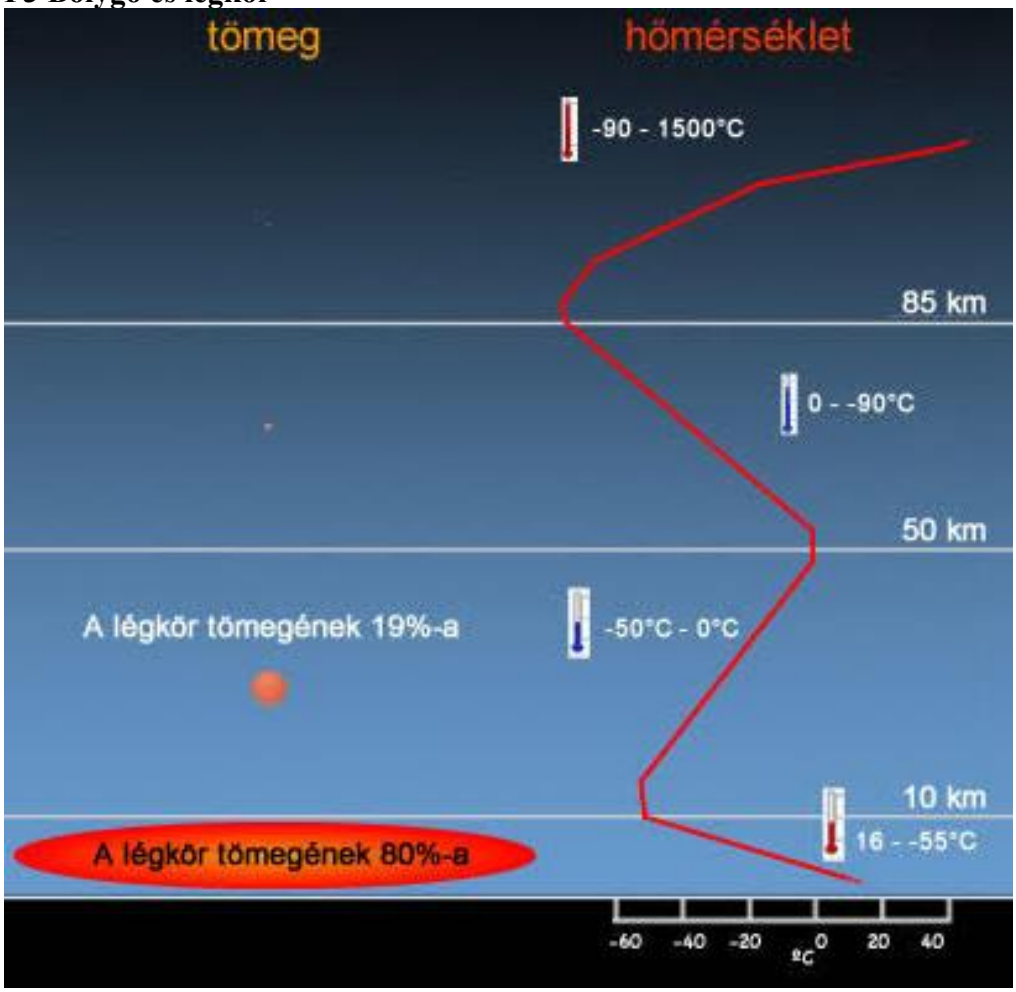
Ebből:

$$2fM\frac{x}{d(d+x)}=v^2$$

$$v^2=\sqrt{2fM\frac{x}{d(d+x)}}=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 24\frac{10\,000\,000}{210\,000\,000\cdot 220\,000\,000}}=416{,}2\left(\frac{m}{s}\right)$$

Tehát, ha a kő sebessége ütközés után $416{,}2\frac{m}{s}$ nagyságú, akkor nem ütközik a Földnek, hanem ellipszis pályára áll és csak tízezer kilométerre közelíti meg.

F3 Bolygó és légkör



(legkoroptika.hu)

A Föld légkörében hidrogén alig található.

a, Hány százaléka a hidrogén részecskéinek átlagos sebessége a szökési sebességnek?

b, Mekkora hőmérsékletű légkör esetén lenne a hélium ugyanilyen helyzetben a Föld légkörében?

c, Mekkora lenne annak a Föld méretű bolygónak a sűrűsége, amelynek légkörében a hélium részecskéinek átlagos sebessége ugyanilyen arányban viszonyulna a szökési sebességhez, ha a hőmérséklet az eredeti földi viszonyok szerint alakulna?

Megoldás:
a, A mellékelt ábrán látjuk, hogy a légkör felső határa gyakorlatilag 50 kilométer magasan van (99%). Itt kell megnézni a hidrogén (H_2) molekula sebességét. Ezen a helyen a hőmérséklet 0°C, vagyis 273 K.
Az ekvipartició tétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

Ebből:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kT}{\frac{M}{N_A}}} = \sqrt{\frac{3kN_AT}{M:1000}} = 1841\frac{m}{s}$$

A szökési sebesség ebben a magasságban:

$$-f\frac{Mm}{d} + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

alapján:

$$v = \sqrt{\frac{2fM}{d}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{6\,420\,000}} = 11166\left(\frac{m}{s}\right)$$

Ennek a hidrogén sebessége a 16,5%-a.

b, Ekkor a hélium sebessége $1841\frac{m}{s}$, ebből kell hőmérsékletet számolni. A hélium atom kétszer olyan nehéz, mint a hidrogénmolekula, ezért:

$$T = \frac{mv^2}{3k} = \frac{2mv^2}{3k} = 546\ K$$

Vagyis ha a Föld légköre 50 kilométer magasan 546 K lenne, akkor a hélium sebessége úgy viszonyulna a szökési sebességhez, mint most a hidrogéné.
c, A hélium szökési sebessége a hőmérsékletnek megfelelően

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_{He}}} = \sqrt{\frac{3kT}{2m_{H_2}}} == \frac{1841}{\sqrt{2}}\frac{m}{s} = 1302\frac{m}{s}$$

Az arány itt is 16,5%, ezért a szökési sebesség $\frac{1302}{0{,}165}\frac{m}{s} = 7890\frac{m}{s}$ a megadott körülmények között 50 kilométer magasságban.

$$v = \sqrt{\frac{2fM}{d}} == 7890\left(\frac{m}{s}\right)$$

Ebből:

$$f\frac{\frac{M}{\rho_{régi}}\rho_{új}}{d} = \frac{1}{2}v^2$$

$$\rho_{új} = \frac{1}{2Mf}v^2 d\rho_{régi} = 3058\left(\frac{kg}{m^3}\right)$$

Tehát, ha a Föld sűrűsége $3058\left(\frac{kg}{m^3}\right)$ lenne, akkor a hélium sebessége 50 km magasan éppen a szökési sebesség 16,5 %-a lenne.